Devoir surveillé n$^{\mathrm{o}}$ 3

Vendredi 13 décembre

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Rappel des consignes

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de trois exercices indépendants. Ils seront rédigés sur des copies distinctes.

Exercice 1. Étude de matrices tridiagonales particulières (*CCINP 2024*)
Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés (diagonalisabilité, valeur du déterminant) de certaines matrices tridiagonales.
Plus précisément, pour un entier naturel $n \geqslant 2$, on considère $n-1$ couples de nombres complexes (a_k, b_k), pour k variant de 1 à n, tels que $a_k b_k = -1$ et on s'intéressera alors à la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

On posera également $M_1 = (1)$ (matrice carrée d'ordre 1 dont le seul coefficient vaut 1).

Les quatre parties de ce problème sont indépendantes. Elles peuvent être traitées séparément.

Notations

- On note $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A et $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à un scalaire λ ;
- on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement dans $\mathbb{R}$) ;
- on note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement dans $\mathbb{R}$) ;
- on note I_n la matrice identité d'ordre n ;
- on note $\bar{z}$ le conjugué d'un nombre complexe z.

Partie I - Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

Dans cette partie, on considère que n est égal à 3 et on pose $a_1 = a_2 = -1$ et $b_1 = b_2 = 1$. On s'intéresse donc à la matrice M_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q1. Justifier que M_3 vérifie bien les données de l'énoncé.

Q2. Déterminer le rang de $M_3 - \mathrm{I}_3$ et en déduire que M_3 admet au moins une valeur propre réelle à préciser.

Q3. Déterminer $\chi_{M_3}(X)$. Ce polynôme est-il scindé dans $\mathbb{R}$?

Q4. Déduire de la question précédente la valeur du déterminant M_3.

Q5. Justifier que M_3 admet 3 valeurs propres complexes distinctes, dont une seule est réelle et les deux autres conjuguées. En déduire que M_3 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et donner, sans aucun calcul, la dimension de ses sous-espaces propres.

On note dans la suite λ l'unique valeur propres réelle de M_3 et μ l'unique valeur propre complexe de M_3 dont la partie imaginaire est strictement positive. Ainsi, les valeurs propres de M_3 sont λ, μ et $\bar{\mu}$.

Q6. Déterminer une base du sous-espace propre $E_\lambda(M_3)$.

Q7. Déterminer les nombres complexes p tels que :

$$M_3 \begin{pmatrix} p \\ \mathrm{i}\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) \begin{pmatrix} p \\ \mathrm{i}\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix}.$$

En déduire une base du sous-espace propre $E_\mu(M_3)$.

Q8. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, une matrice à coefficients réels, $z \in \mathbb{C}$ et :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

Montrer que si X est vecteur propre de N associé à la valeur propre z, alors le vecteur :

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de N associé à la valeur propre $\bar{z}$.
En déduire une base de $E_{\bar{\mu}}(M_3)$.

Partie II - Cas général dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Uniquement dans cette partie, on considère que l'entier naturel n vaut 2. On s'intéresse donc à la matrice M_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix},$$

où a_1 et b_1 sont deux nombres complexes tels que $a_1 b_1 = -1$.

Q9. Déterminer $\chi_{M_2}(X)$.

Q10. Si on considère a_1 et b_1 réels, la matrice M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Trigonalisable dans $\mathbb{R}$?

Q11. La matrice M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?
Aucune diagonalisation effective n'est demandée.

Q12. Donner la valeur du déterminant de M_2.

Objectif de la suite du problème
Dans la partie III, nous démontrerons certains résultats liés à la suite de Fibonacci.
Dans la partie IV, nous déterminerons la valeur du déterminant des matrices tridiagonales vérifiant les conditions de l'énoncé.

Partie III - La suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geqslant 0}$ de la manière suivante : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Q13. Montrer que pour tout entier naturel n, F_n est un entier naturel.

Q14. Résoudre l'équation caractéristique associée à $(F_n)_{n \geqslant 0}$. En déduire l'expression de F_n pour tout entier naturel n.

On considère la fonction récursive suivante, prenant en argument un entier naturel n, et renvoyant la valeur de F_n :

```python
def Fibo(n):
    ''' n : entier naturel.
    Renvoie la valeur de Fn. '''
    if n <= 1:
        return 1
    return Fibo(n-1) + Fibo(n-2)
```

Q15. Les trois sous-questions suivantes sont liées à la fonction `Fibo`.

a) À l'aide d'un schéma, représenter les différents appels récursifs lors de l'exécution de l'instruction `Fibo(4)`.

b) Expliquer, de manière simple et sans calcul, pourquoi cette fonction a une complexité de calcul élevée.

c) Écrire une fonction `FiboV2`, prenant en argument un entier naturel n et renvoyant la valeur du terme F_n. Cette fonction ne devra pas être récursive et devra avoir un coût de calcul moins élevé que `Fibo`.

Partie IV - Calcul du déterminant dans le cas général

On reprend les notations de la présentation générale et on considère donc les matrices M_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. On note alors d_n le déterminant de M_n.
On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est définie de la manière suivante : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Q16. Donner les valeurs de d_1 et de d_2 puis calculer d_3.

Q17. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$.
On pourra développer d_{n+2} par rapport à la dernière ligne de M_{n+2}.

Q18. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $d_n = F_n$.

Exercice 2. Étude d'une suite d'intégrales (*d'après CCINP 2020*)

Partie A - Convergence d'intégrales

Q19. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t^n \mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Q20. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ est convergente.

Q21. À l'aide d'un changement de variable, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t^n \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ est convergente et que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t^n \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$.

Q22. Déduire des résultats précédents que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ est convergente.

Partie B - Calcul et résultats asymptotiques

Pour la suite, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ et on admet que $I_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Q23. En utilisant la question **Q21**, justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p+1} = 0$.

Q24. Établir à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_{2(k+1)} = \dfrac{2k+1}{2} I_{2k}$.

Indication : on écrira $t^{2k+2} \mathrm{e}^{-t^2} = t^{2k+1} \times t \,\mathrm{e}^{-t^2}$.

Q25. Montrer par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$.

Q26. On **admet** que $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling).

En utilisant ce résultat, en déduire que $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} I_{2p} = +\infty$.

Partie C - Une équation différentielle

Q27. Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt) \,\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ est convergente.

On peut ainsi définir sur $\mathbb{R}$ une fonction $S \colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt) \,\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$. On admet que la fonction S est dérivable et solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E) \colon \quad y' + \frac{x}{2} y = \frac{1}{2}.$$

Q28. Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E).

Q29. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $S(x) = \dfrac{1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}} \,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Une équation différentielle (*d'après CCINP 2018*)
Étant donné un réel μ, on considère l'équation différentielle (E_μ) suivante :

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - \mu y = 0 \qquad (E_\mu)$$

dont on cherche des fonctions solutions y sur l'intervalle ouvert $]0\,;1[$.

Partie I - Résolution dans le cas où $\mu = 0$

Dans cette partie, on suppose que $\mu = 0$, on cherche donc à résoudre sur $]0\,;1[$, l'équation

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' = 0. \qquad (E_0)$$

Q30. Soit $f\colon x \mapsto \arcsin(2x - 1)$. Montrer que f est définie et continue sur le segment $[0\,;1]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0\,;1[$ et que

$$\forall x \in\,]0\,;1[,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Q31. Montrer que toute fonction constante sur $]0\,;1[$ est solution de (E_0).

Q32. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $\dfrac{16x-8}{16(x^2-x)} = \dfrac{1/2}{x} + \dfrac{1/2}{x-1}$.

Q33. On pose $z = y'$. Montrer que (E_0) est équivalente à

$$z' + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}\right)z = 0. \qquad (F)$$

Q34. Résoudre (F) sur $]0\,;1[$.

Q35. En déduire les solutions de (E_0) sur $]0\,;1[$.

Partie II - Recherche d'une solution particulière dans le cas où $\mu \neq 0$

On se place dans le cas où $\mu \neq 0$.
Soit y une fonction égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif :

$$\forall x \in\,]-R\,;R[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q36. Justifier que y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ensemble que vous préciserez puis exprimer $y'(x)$ et $y''(x)$ à l'aide d'une série.

Q37. Montrer que y vérifie (E_μ) si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(16n^2 - \mu)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right]x^n = 0$.

On supposera dorénavant que y est solution de (E_μ).

Q38. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = \dfrac{16n^2 - \mu}{4(2n+2)(2n+1)} a_n$.

Q39. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{a_0}{4^n (2n)!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)$.

Q40. Si $a_0 = 0$, donner une expression simple de y et préciser son domaine de validité.

Q41. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu \neq 16p^2$ pour tout entier p, calculer le rayon de convergence de y.

Q42. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$ avec p un entier, montrer que y est polynomiale et préciser son degré.